MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
A. Ribelles, D. Rost

WS 2019/20
Blatt 9
16.12.2019

Tutorium zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. Die gegebene DGL
$$y'' - 5y' + 6y = e^{2x} \qquad (*)$$
ist eine inhomogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.
Wir betrachten zuerst die homogene lineare DGL
$$y'' - 5y' + 6y = 0, \qquad (*_0)$$
Allgemeine Lösung von $(*_0)$:
Das charakteristische Polynom von $(*_0)$
$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 \; = \; (\lambda - 2)(\lambda - 3)$$
hat die zwei Nullstellen $\lambda_1 = 2$ (reell, einfach), $\lambda_2 = 3$ (reell, einfach).
Ein Fundamentalsystem von $(*_0)$ besteht damit aus den 2 linear unabhängigen Funktionen
$$\varphi_1(x) = e^{2x}, \qquad \varphi_2(x) = e^{3x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$
Die allgemeine Lösung von $(*_0)$ ist damit
$$\varphi_{c_1,c_2}(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}, \;\; x \in \mathbb{R}, \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
Partikuläre Lösung von $(*)$:
Die rechte Seite von $(*)$ ist von der Form $b(x) = p(x)\, e^{a\,x} = e^{2x}$ mit dem Polynom $p(x) = 1$ vom Grad $m = 0$ und $a = 2$; da $a = 2$ eine einfache Nullstelle von $\chi(\lambda)$ ist, ist also die Vielfachheit $\alpha = 1$.

Für die partikuläre Lösung φ_p von $(*)$ wählen wir also den Ansatz
$$\varphi_p(x) = q(x)\, e^{ax} = (rx + s)e^{2x}$$
mit dem Polynom $q(x) = rx + s$ vom Grade $m + \alpha = 0 + 1 = 1$.
Nachdem $x \longmapsto se^{2x}$ die homogene Gleichung $(*_0)$ löst, können wir $s = 0$ wählen, machen also jetzt den modifizierten Ansatz
$$\varphi_p(x) \; = \; rxe^{2x}.$$
Es ist also dann
$$\begin{aligned} \varphi_p'(x) &= re^{2x} + 2rxe^{2x} \\ \varphi_p''(x) &= 2re^{2x} + 2re^{2x} + 4rxe^{2x} = 4re^{2x} + 4rxe^{2x}, \quad \text{jeweils } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\varphi_p \text{ Lösung von } (*) &\iff \varphi_p''(x) - 5\varphi_p'(x) + 6\varphi_p(x) = e^{2x} \ \ \forall x \in \mathbb{R} \\
&\iff 4re^{2x} + 4rxe^{2x} \ - 5\,(re^{2x} + 2rxe^{2x}) + 6(rxe^{2x}) = e^{2x} \ \ \forall x \in \mathbb{R} \\
&\iff 4re^{2x} - 5re^{2x} - e^{2x} = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \\
&\iff (-r-1)e^{2x} = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \\
&\iff r = -1.
\end{aligned}$$

Damit ist dann

$$\varphi_p(x) = -xe^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

eine partikuläre Lösung von $(*)$

Allgemeine Lösung von $(*)$:

Die allgemeine Lösung von $(*)$ ist damit

$$\varphi(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} - xe^{2x}, \ \ x \in \mathbb{R}, \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Wir betrachten die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$y'' + 16y = -\sin(4x), \qquad (*)$$

und zunächst die homogene lineare Differentialgleichung

$$y'' + 16y = 0 \qquad (*_0)$$

Allgemeine Lösung von $(*_0)$:

Das charakteristische Polynom von $(*_0)$

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 16 \ = \ (\lambda - 4i)\,(\lambda + 4i)$$

hat die beiden Nullstellen $\lambda_1 = 4i = 0 + 4i$ (komplex, einfach) sowie $\lambda_2 = -4i$ (komplex, einfach). Die allgemeine Lösung von $(*_0)$ ist damit

$$\varphi_{c_1,c_2}(x) = c_1 e^{0x}\cos(4x) + c_2 e^{0x}\sin(4x) = c_1\cos(4x) + c_2\sin(4x), \ \ x \in \mathbb{R}, \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Partikuläre Lösung von $(*)$:

Die rechte Seite von $(*)$ ist von der Form $b(x) = p(x)\,e^{a\,x}\sin(kx) = -\sin(4x)$ mit der Polynomfunktion $p(x) = -1$ vom Grade $m = 0$ und $a = 0, k = 4$. Da $a + ki = 4i$ eine einfache Nullstelle von $\chi(\lambda)$ ist, ist die Vielfachheit $\alpha = 1$, also $m + \alpha = 0 + 1 = 1$.

Für die partikuläre Lösung φ_p von $(*)$ wählen wir also den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q_1(x)\,e^{ax}\cos(kx) + q_2(x)e^{ax}\sin(kx) = (r_1x + s_1)\cos(4x) + (r_2x + s_2)\sin(4x)$$

mit Polynomfunktionen $q_1(x) = r_1x + s_1$ und $q_2(x) = r_2x + s_2$ jeweils vom Grade $m + \alpha = 1$. Nachdem $x \longmapsto s_1\cos(4x)$ und $x \longmapsto s_2\sin(4x)$ die homogene Gleichung $(*_0)$ lösen, können wir $s_1 = s_2 = 0$ wählen, machen also jetzt den modifizierten Ansatz

$$\varphi_p(x) \ = \ r_1x\cos(4x) + r_2x\sin(4x).$$

Es ist dann

$$\varphi_p'(x) = r_1 \cos(4x) - 4r_1 x \sin(4x) + r_2 \sin(4x) + 4r_2 x \cos(4x)$$
$$\varphi_p''(x) = -8r_1 \sin(4x) - 16r_1 x \cos(4x) + 8r_2 \cos(4x) - 16r_2 x \sin(4x)$$

und

$$\begin{aligned}
\varphi_p \text{ Lösung von } (*) \iff & \varphi_p''(x) + 16\varphi_p(x) = -\sin(4x) \ \ \forall x \in \mathbb{R} \\
\iff & -8r_1 \sin(4x) - 16r_1 x \cos(4x) + 8r_2 \cos(4x) - 16r_2 x \sin(4x) \\
& + \ 16(r_1 x \cos(4x) + r_2 x \sin(4x)) = -\sin(4x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\iff & -8r_1 \sin(4x) + 8r_2 \cos(4x) \ = \ -\sin(4x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\iff & (-8r_1 + 1) \sin(4x) + 8r_2 \cos(4x) \ = \ 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\iff & r_1 = \frac{1}{8} \quad \wedge \quad r_2 = 0.
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\varphi_p(x) = \frac{1}{8} x \cos(4x), \quad x \in \mathbb{R},$$

eine partikuläre Lösung von $(*)$.

Die allgemeine Lösung von $(*)$ ist damit

$$\varphi(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x) + \frac{1}{8} x \cos(4x)\,, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Wir betrachten die homogene lineare DGL

$$y''' + 3y'' + 2y' = 0, \qquad (*_0)$$

sowie die beiden inhomogenen linearen DGL

$$y''' + 3y'' + 2y' = e^x, \qquad (*_1)$$
$$y''' + 3y'' + 2y' = x^2, \qquad (*_2)$$

Allgemeine Lösung von $(*_0)$:
Das charakteristische Polynom von $(*_0)$

$$\chi(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda^2 + 3\lambda + 2) \ = \ \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)$$

hat die Nullstellen $\lambda_1 = 0$ (reell, einfach) und $\lambda_1 = -1$ (reell, einfach) und $\lambda_2 = -2$ (reell, einfach).
Die allgemeine Lösung von $(*_0)$ ist damit

$$\varphi_{c_1,c_2,c_3}(x) = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x} \ = \ c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x}, \ \ x \in \mathbb{R}, \quad \text{mit } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Partikuläre Lösung von $(*_1)$:
Die rechte Seite von $(*_1)$ ist von der Form $b(x) = e^x = p(x)\, e^{a\,x}$ mit dem Polynom $p(x) = 1$ vom Grad $m = 0$ und $a = 1$; da $a = 1$ **keine** Nullstelle von $\chi(\lambda)$ ist, ist also ist die Vielfachheit $\alpha = 0$.

Für die partikuläre Lösung φ_1 von $(*_1)$ wählen wir also den Ansatz

$$\varphi_1(x) = q_1(x)\, e^{ax} = r\, e^{1x} = r\, e^x$$

mit dem Polynom $q_1(x) = r$ vom Grade $m + \alpha = 0 + 0 = 0$.
Es ist also dann

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= re^x \\ \varphi_1'(x) &= re^x \\ \varphi_1''(x) &= re^x, \quad \text{jeweils } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \varphi_1 \text{ Lösung von } (*_1) &\Longleftrightarrow \varphi_1'''(x) + 3\varphi_1''(x) + 2\varphi_1'(x) = e^x \ \ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow re^x + 3re^x + 2re^x = e^x \ \ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow (6r-1)e^x = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow r = \frac{1}{6} \ . \end{aligned}$$

Also ist

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{6}e^x, \quad x \in \mathbb{R},$$

eine partikuläre Lösung von $(*_1)$.

Partikuläre Lösung von $(*_2)$:

Die rechte Seite von $(*_2)$ ist von der Form $b(x) = x^2 = p(x)\,e^{a\,x}$ mit dem Polynom $p(x) = x^2$ vom Grad $m = 2$ und $a = 0$; da $a = 0$ eine einfache Nullstelle von $\chi(\lambda)$ ist, ist also die Vielfachheit $\alpha = 1$.

Für die partikuläre Lösung φ_2 von $(*_2)$ wählen wir also den Ansatz

$$\varphi_2(x) = q_2(x)\,e^{ax} = \big(rx^3 + sx^2 + tx + u\big)\,e^{0x} = rx^3 + sx^2 + tx + u$$

mit dem Polynom $q_2(x) = rx^3 + sx^2 + tx + u$ vom Grade $m + \alpha = 2 + 1 = 3$.
Nachdem $x \longmapsto u$ die homogene Gleichung $(*_0)$ löst, können wir $u = 0$ wählen, machen also jetzt den modifizierten Ansatz

$$\varphi_2(x) \ = \ rx^3 + sx^2 + tx.$$

Es ist also dann

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= rx^3 + sx^2 + tx \\ \varphi_2'(x) &= 3rx^2 + 2sx + t \\ \varphi_2''(x) &= 6rx + 2s \\ \varphi_2'''(x) &= 6r, \quad \text{jeweils } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \varphi_2 \text{ Lösung von } (*_2) &\Longleftrightarrow \varphi_2'''(x) + 3\varphi_2''(x) + 2\varphi_2'(x) = x^2 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow 6r + 3(6rx + 2s) + 2(3rx^2 + 2sx + t) \ = \ x^2 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow (6r-1)x^2 + (18r + 4s)x + (6r + 6s + 2t) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow r = \frac{1}{6} \ \wedge \ s = -\frac{3}{4} \ \wedge \ t = \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Damit ist dann

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{4}x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

eine partikuläre Lösung von $(*_2)$

Partikuläre Lösung von $(*)$:
Nun ist nach 5.14 dann

$$\varphi_p(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = \frac{1}{6}e^x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{4}x, \quad x \in \mathbb{R},$$

eine partikuläre Lösung von $(*)$.

Allgemeine Lösung von $(*)$:
Die allgemeine Lösung von $(*)$ ist damit

$$\varphi(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x} + \frac{1}{6}e^x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{4}x, \ \ x \in \mathbb{R}, \quad \text{mit } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

4. Wir bestimmen zuerst für festes $a \in \mathbb{R}$ die Lösung des AWP

$$y'' - 2a\,y' + a^2 y = 2e^{ax} \qquad \text{mit} \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

und suchen anschließend diejenigen $a \in \mathbb{R}$, für die die Lösung die zusätzliche Bedingung $y(1) = 1$ erfüllt.

Wir betrachten die inhomogene lineare lineare DGL

$$y'' - 2ay' + a^2 y = 2e^{ax}, \qquad (*)$$

sowie homogene lineare DGL

$$y'' - 2ay' + a^2 y = 0. \qquad (*_0)$$

Allgemeine Lösung von $(*_0)$:
Das charakteristische Polynom von $(*_0)$

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 2\,a\,\lambda + a^2 = (\lambda - a)^2$$

hat die Nullstelle $\lambda_1 = \lambda_2 = a$ (reell, doppelt).
Die allgemeine Lösung von $(*_0)$ ist damit

$$\varphi_{c_1,c_2}(x) = c_1 e^{ax} + c_2 x\, e^{ax}, \ \ x \in \mathbb{R}, \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Partikuläre Lösung von $(*)$:
Die rechte Seite von $(*)$ ist von der Form der Form $b(x) = 2e^{ax} = p(x)\, e^{a\,x}$ mit der Polynomfunktion $p(x) = 2$ vom Grade $m = 0$ und der doppelten Nullstelle a von $\chi(\lambda)$, also ist die Vielfachheit $\alpha = 2$.

Für die partikuläre Lösung φ_p von $(*)$ wählen wir also den Ansatz

$$\varphi_p(x) = q(x)\, e^{ax} = \big(rx^2 + sx + t\big)\, e^{ax}$$

mit einer Polynomfunktion $q(x) = rx^2 + sx + t$ vom Grade $m + \alpha = 2$; nachdem $x \longmapsto (sx+t)e^{ax}$ eine Lösung der homogenen Gleichung $(*_0)$ ist, können wir $s = t = 0$ wählen, machen also jetzt den modifizierten Ansatz

$$\varphi_p(x) \ = \ rx^2\, e^{ax}.$$

Es ist dann

$$\begin{aligned}
\varphi_p'(x) &= 2r\,x \cdot e^{ax} + r\,x^2 \cdot a e^{ax} \\
\varphi_p''(x) &= 2r\, e^{ax} + 2arx\, e^{ax} + 2arx\, e^{ax} + a^2 r x^2\, e^{ax} \\
&= 2r\, e^{ax} + 4arx\, e^{ax} + a^2 r x^2\, e^{ax}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\varphi_p \text{ Lösung von } (*) &\iff \varphi_p''(x) - 2a\varphi_p'(x) + a^2\varphi_p(x) = 2e^{ax} \ \ \forall x \in \mathbb{R} \\
&\iff (2r + 4arx + a^2rx^2) - 2a(2rx + arx^2) + a^2rx^2 = 2 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \\
&\iff 2r = 2 \iff r = 1.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\varphi_p(x) = x^2e^{ax}, \quad x \in \mathbb{R},$$

eine partikuläre Lösung von $(*)$.

Allgemeine Lösung von $(*)$:
Die allgemeine Lösung von $(*)$ ist damit

$$\varphi(x) = c_1e^{ax} + c_2x\,e^{ax} + x^2e^{ax}, \ \ x \in \mathbb{R}, \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Lösung des AWP:
Es ist

$$\varphi'(x) = c_1ae^{ax} + c_2\,e^{ax} + c_2ax\,e^{ax} + 2xe^{ax} + ax^2e^{ax}.$$

Wir bestimmen nun $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ so, daß die Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$ erfüllt sind. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
y(0) = 0 &\qquad c_1 \cdot e^0 = 0 \iff c_1 = 0 \\
y(0) = 0 &\qquad a\,c_1 + c_2 \cdot e^0 = 0 \underset{c_1=0}{\iff} c_2 = 0.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\varphi(x) = x^2\,e^{ax}, \quad x \in \mathbb{R},$$

Lösung des AWP.

Diese Lösung erfüllt nun wegen

$$\varphi(1) = 1 \iff 1^2 \cdot e^a = 1 \iff e^a = 1 \iff a = 0$$

genau dann die zusätzliche Bedingung $y(1) = 1$, wenn $a = 0$ gilt; in diesem Fall ergibt sich als Lösungsfunktion

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = x^2.$$